2. On pose $U=\frac{1}{2}\left[(1-i)+\sqrt{3}(1+i)\right]$.

a. Calculer U^2.
b. Déterminer la forme trigonométrique de U.
c. En déduire alors les valeurs de
$\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

3. Pour tout $Z\in\mathbb{C}$, on pose
$P(Z)=Z^3-2\left(\sqrt{3}+i\right)Z^2+4\left(1+i\sqrt{3}\right)Z-8i$.

a. Montrer que l'équation $P(Z)=0$ admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z)=0$.

4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points
$A\left(\sqrt{3}-i\right)$, $B\left(\sqrt{3}+i\right)$ et $C(2i)$.

a. Représenter les points A, B et C.
b. Montrer que le quadrilatère OABC est un losange.

37 Soit un réel α de $[0,\frac{\pi}{2}]$.

I. 1. Exprimer à l'aide de α,
$\left(e^{i2\alpha}+2e^{i\alpha}\right)^2-\left(e^{i2\alpha}-2e^{i\alpha}\right)^2$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$z^2-\left(e^{i2\alpha}+2e^{i\alpha}\right)z+2e^{i3\alpha}=0$.

II. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A, B, A′et B′ les points d'affixes respectives $z_A=e^{i2\alpha}$, $z_B=2e^{i\alpha}$, $z_{A'}=iZ_A$ et $z_{B'}=-iZ_B$.

1. a. Mettre $z_{A'}$ et $z_{B'}$ sous la forme exponentielle.

b. Placer les points A, B, A′ et B′ pour $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

2. Soit I le milieu du segment $[A'B']$.

a. Montrer que $\frac{z_I}{z_B-z_A}=-\frac{1}{2}i$.

b. En déduire que la médiane issue de O du triangle OA′B′ est une hauteur issue de O du triangle OAB et que $OI=\frac{1}{2}AB$.

38 I.1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$z^2-2e^{i\alpha}z+2e^{2i\alpha}=0$, α un réel de $[0,\pi]$.

2. Mettre les solutions sous la forme exponentielle.

II. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A et B les points d'affixes respectives
$z_1=(1-i)e^{i\alpha}$ et $z_2=(1+i)e^{i\alpha}$.

1. a. Montrer que $\frac{z_2}{z_1}=i$.

b. En déduire que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.

2. a. Montrer que $\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\alpha+\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

b. Déterminer α pour que la droite (AB) soit parallèle à la droite d'équation $y=x$.

c. Construire A et B pour la valeur de α trouvée.

39 Soit un réel θ de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et l'équation
$(E): iz^2+6\sin\theta z-9i=0$.

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

b. Ecrire sous la forme exponentielle les solutions de l'équation (E).

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $3i$, $z_1=3(\cos\theta+i\sin\theta)$ et $z_2=3(-\cos\theta+i\sin\theta)$.

a. Vérifier que les points A, M_1 et M_2 sont sur un même cercle que l'on précisera.
b. Déterminer la valeur de θ pour laquelle le quadrilatère OM_1AM_2 soit un losange.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^4+3\sqrt{3}z^2-9i=0$.
Placer les points images des solutions.